

# Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – a)

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades  $f$  mit der Funktionsgleichung  $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$ , wobei die Koeffizienten  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind.

## Aufgabenstellung:

- a) Begründen Sie, warum die Funktion  $f$  genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten  $a$  und  $b$  unterschiedliche Vorzeichen haben!
- A Die Steigung der Tangente an den Graphen von  $f$  an der Stelle  $x = 0$  entspricht dem Wert des Koeffizienten  $b$ . Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

Quelle: BMBWF, Nebentermin 1 2017/18 – Mathematik (AHS), Teil 2, Aufgabe 1,  
[www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-1-201718-mathematik-ahs/](http://www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-1-201718-mathematik-ahs/)

# Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – a)

The screenshot shows the 'Edit Aktion Interaktiv' window of a Casio calculator. The window contains the following text and mathematical expressions:

- Define  $f(x) = ax^3 + bx$
- done
- $f(x)$
- $a \cdot x^3 + b \cdot x$
- factor(ans)
- $x \cdot (a \cdot x^2 + b)$
- factorOut( $a \cdot x^2 + b, a$ )
- $a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}\right)$
- $\frac{d}{dx}(f(x)) |_{x=0}$
- $b$

Kontrollieren

Lösung:

Nullstellen bei  $x = 0$  und  $x^2 + \frac{b}{a} = 0$ ,  
somit drei Nullstellen genau dann, wenn  $\frac{b}{a} < 0$

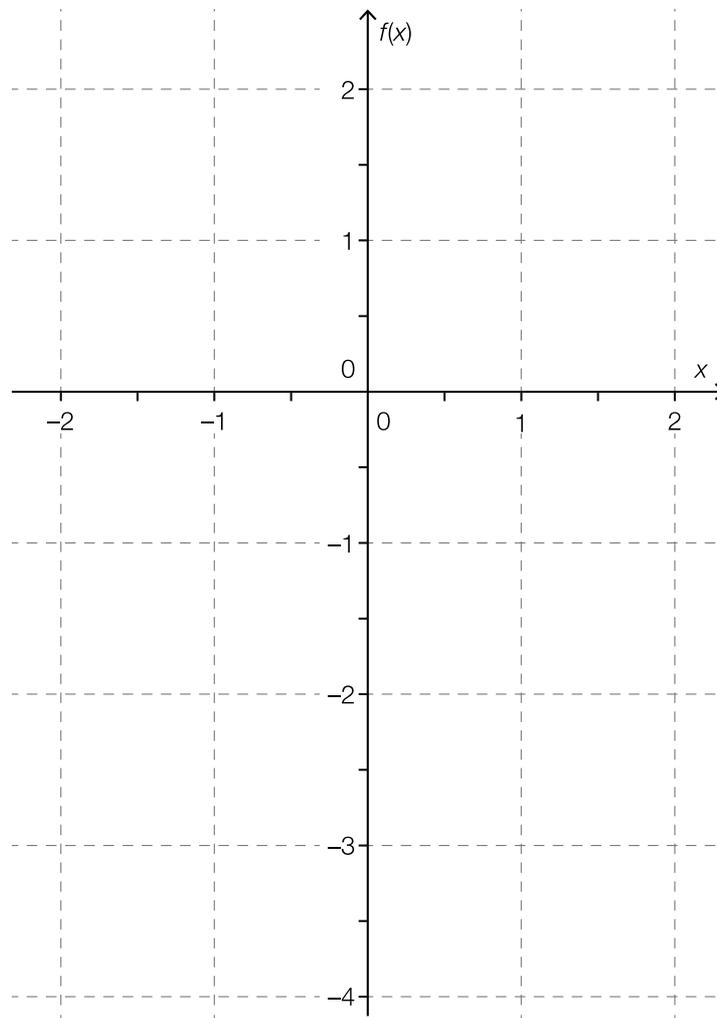
Steigung der Tangente an der Stelle 0:  $b$

# Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)

b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten  $a$  und  $b$  an, sodass  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  folgt, dass  $f$  eine Nullstelle im Intervall  $(0; 1)$  hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion  $f$  im nachstehenden Koordinatensystem!

# Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)



# Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)

The screenshot shows a CASIO calculator interface with the following steps and results:

- Input:  $x \cdot (a \cdot x^2 + b)$
- Operation: `factorOut(a·x2+b, a)`
- Result:  $a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}\right)$
- Operation:  $\frac{d}{dx}(f(x)) |_{x=0}$
- Result:  $b$
- Operation:  $\int_0^1 f(x) dx$
- Result:  $\frac{a}{4} + \frac{b}{2}$
- Operation: `solve(ans, a)`
- Result:  $\{a = -2 \cdot b\}$
- Operation: `f(x) | ans | b=3`
- Result:  $-6 \cdot x^3 + 3 \cdot x$

The calculator interface includes a toolbar with icons for fractions, navigation, integration, simplification, differentiation, and graphing. The bottom menu shows 'Algeb', 'Standard', 'Reell', and '2π'.

Lösung:

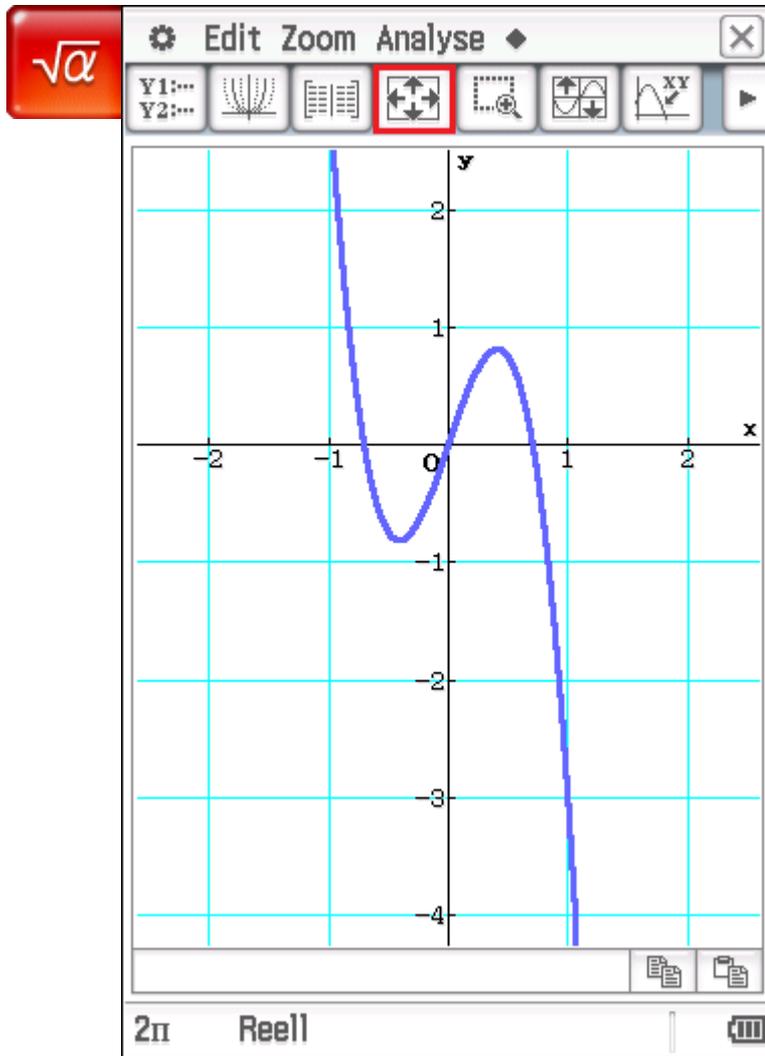
$$a = -2 \cdot b$$

$f(x) \geq 0$  für  $x \in [0; 1]$ , dann  $\int_0^1 f(x) dx > 0$ ;

$f(x) \leq 0$  für  $x \in [0; 1]$ , dann  $\int_0^1 f(x) dx < 0$ ;

Also Vorzeichenwechsel von  $f(x)$  in  $x \in [0; 1]$

# Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)



Grafikfenster mit  öffnen;

$-6 \cdot x^3 + 3 \cdot x$  in Grafikfenster ziehen;

Grafikfenster mit  anpassen