Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – a)

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind.

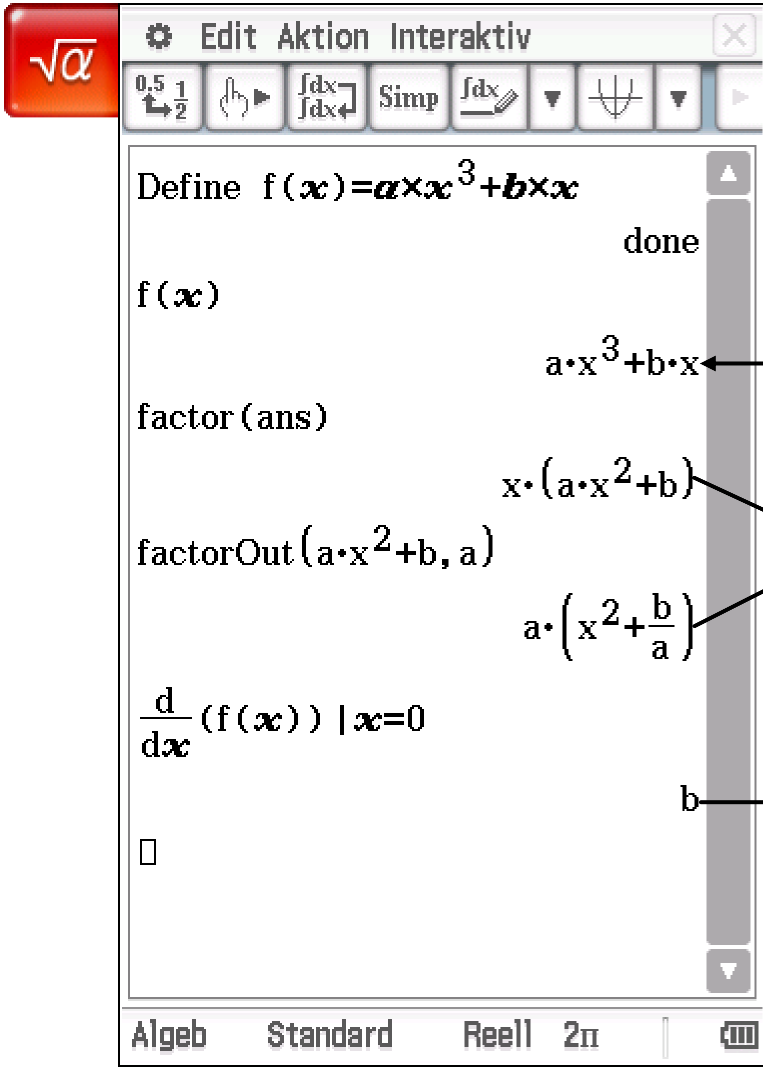
Aufgabenstellung:

a) Begründen Sie, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!

$\boxed{\text{A}}$ Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b. Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

Quelle: BMBWF, Nebentermin 1 2017/18 – Mathematik (AHS), Teil 2, Aufgabe 1,
www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-1-201718-mathematik-ahs/

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – a)



Kontrollieren

Lösung:

Nullstellen bei $x = 0$ und $x^2 + \frac{b}{a} = 0$,

somit drei Nullstellen genau dann, wenn $\frac{b}{a} < 0$

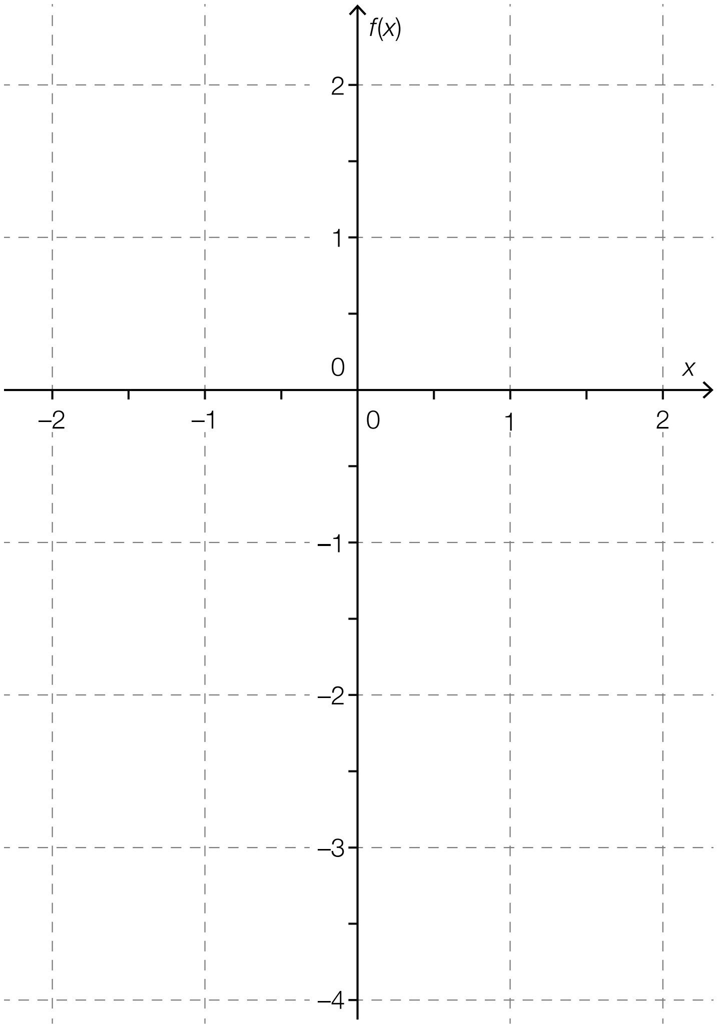
Steigung der Tangente an der Stelle 0: b

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)

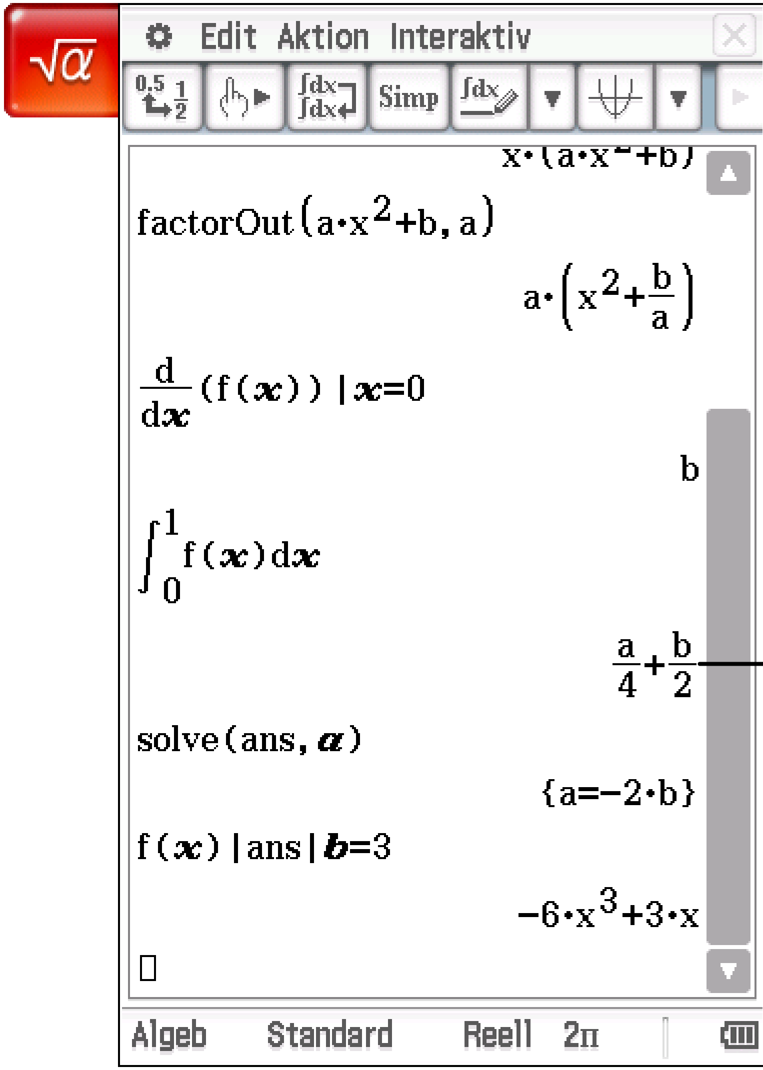
b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten *a* und *b* an, sodass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ folgt, dass *f* eine Nullstelle im Intervall (0; 1) hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion *f* im nachstehenden Koordinatensystem!

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)



Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)



Lösung:

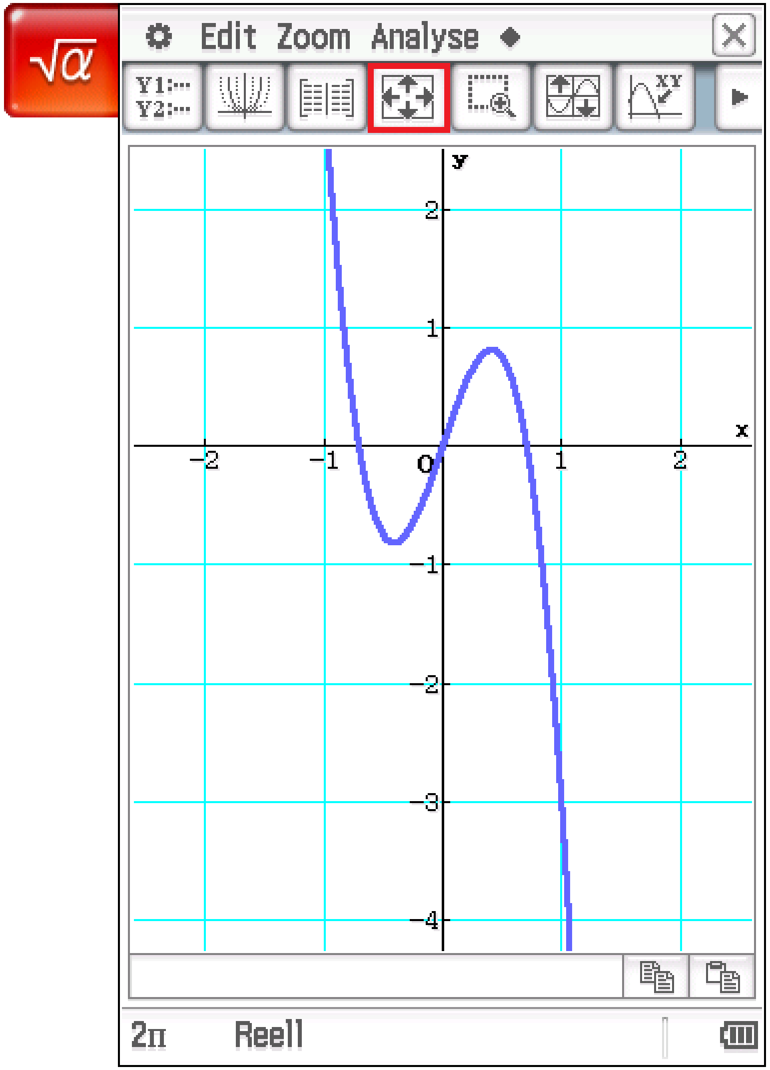
$a = -2 \cdot b$

$f(x) \geq 0$ für $x \in [0;1]$, dann $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x > 0$;

$f(x) \leq 0$ für $x \in [0;1]$, dann $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x < 0$;

Also Vorzeichenwechsel von $f(x)$ in $x \in [0;1]$

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)



Grafikfenster mit öffnen;

$-6 \cdot x^3 + 3 \cdot x$ in Grafikfenster ziehen;

Grafikfenster mit anpassen